1.

$$(x^2 - 13)^2 = 144$$

$$x^2 - 13 = 12 \qquad \text{vagy} \qquad x^2 - 13 = -12$$

$$x^2 = 25 \qquad \text{vagy} \qquad x^2 = 1$$

$$x = 5 \qquad \text{vagy} \qquad x = -5 \qquad \text{vagy} \qquad x = 1 \qquad \text{vagy} \qquad x = -1$$

Ha mind a négy számot megadták, jár a 2 pont; ha nem, akkor nem jár pont.

2. Mivel bármely 5 szomszédos számjegy összege 23, ezért a 10 számjegy összege 46.

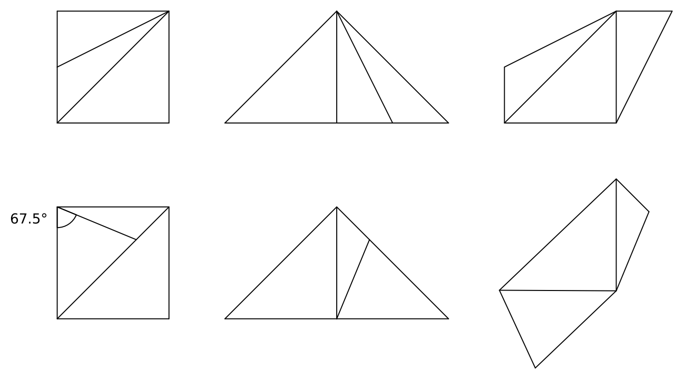
Ez 1 pontot ér.

Mivel az 1., 2., 3., 4. és 5. számjegy összege ugyanannyi, mint a 2., 3., 4., 5. és 6. számjegyé, az 1. számjegy egyenlő a 6.-kal. Hasonlóan a 2. számjegy egyenlő a 7.-kel, ... Az azonos számjegyek közül mindig az egyik pozitív, a másik negatív előjellel szerepel az előjeles összegben. Azaz a keresett érték 0.

Erre 2 pont jár. Ha kitalálták a számot is, azért nem jár pluszpont.

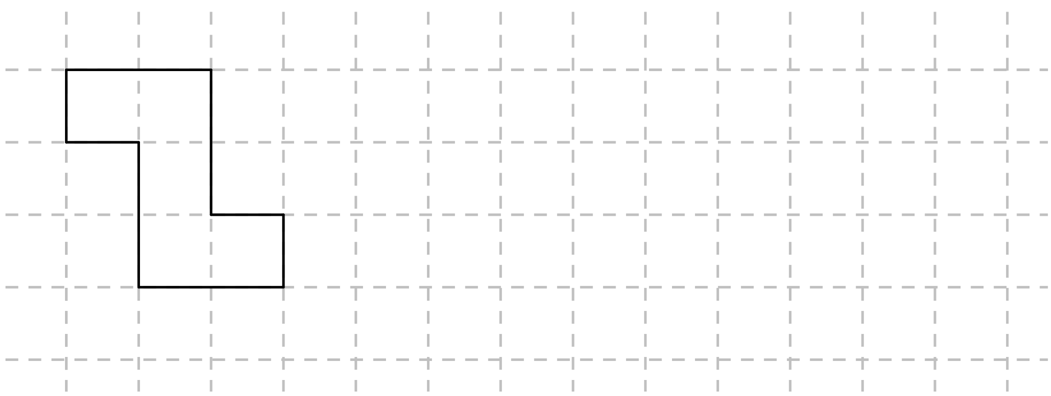
(Egyébként a feltételekből kitalálható a szám is: 6451764517.)

3. Két megoldás látható az ábrán. (A másodiknál a háromszögek körüljárási irányán sem kell változtatni, de a feladat ezt nem várja el.)



Jó megoldásra 3 pont jár. (Elég ha a három háromszög van megadva.)

4.



Jó megoldásra 3 pont jár.

5. Eredetileg a csónak és a kő a saját súlyuknak megfelelő súlyú vizet szorítanak ki (mert lebegnek a felszínen). A kidobás után a csónak továbbra is a saját súlyának megfelelő súlyú vizet szorít ki (lebeg), a kő viszont akkora térfogatú vizet szorít ki, mint amekkora az ő térfogata.

A kővel egyező térfogatú víz kevesebb, mint a kővel egyező súlyú víz (a kő sűrűbb a víznél). A kidobás után tehát kevesebb víz ,,szorul ki", mint előtte, azaz alacsonyabb lesz a vízszint.

Ha helyes a válasz, 4 pont jár.

6. Húzzunk párhuzamost J ponton keresztül AC-vel, ennek a BC szakasszal való metszéspontja legyen M.

$EBFJ$, $EFMJ$ és $JHCM$ négyszögek paralelogrammák (szemközti oldalaik párhuzamosak), ezért $BF = EJ = 6$, $FM = EJ = 6$ és $MC = JH = 11 + 7 = 18$. Így $BC = 6 + 6 + 18 = 30$.

ABC és EBF háromszögek hasonlóak, ezért megfelelő oldalaik aránya egyenlő. Ebből $AB = 30 \cdot \frac{7}{6} = 35$ és $AC = 30 \cdot \frac{5}{6} = 25$.

ABC hármszög kerülete: 30+35+25=90. Végig cm-ben számoltunk, ezt még át kell váltani mm-be. Azaz a megoldás 900 mm.

A 900 mm-re 4 pont jár. Ha cm-ben (vagy bármilyen más hosszmrtékegységben) adják meg a helyes megoldást és leírják a mértékegységet is, akkor 1 pont jár.

7. A két sűrűség legyen ρ_1 és ρ_2, a felemás pálca hosszúsága pedig legyen 1.

Ha a pálcák egyforma hosszúak, akkor a tömegük aránya $\rho_1 : \rho_2$ és a tömegközéppontjaik a felemás pálca két szélső negyedelőpontjánál vannak. Ekkor a közös tömegközéppont a pálca bal szélétől $\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\rho_2}{\rho_1+\rho_2}$ távolságra van.

Ha a pálcák egyforma tömegűek, akkor a hosszaik aránya $\rho_2 : \rho_1$, így a tömegközéppontjaik a felemás pálca bal szélétől $\frac{1}{2} \cdot \frac{\rho_2}{\rho_1+\rho_2}$ illetve $\frac{\rho_2}{\rho_1+\rho_2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\rho_1}{\rho_1+\rho_2}$ távolságra vannak. A közös tömegközéppont ennek a kettőnek a felezőpontjába esik, ami a felemás pálca bal szélétől épp $\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\rho_2}{\rho_1+\rho_2}$ távolságra van.

Azaz a felemás pálca tömegközéppontja mindkét esetben ugyanoda esik.

Erre 4 pont jár.

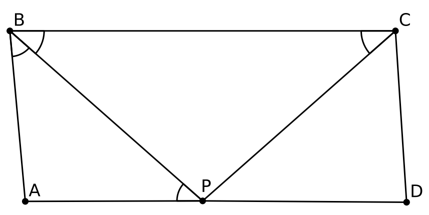
8. BP szögfelező, ezért $ABP\angle = CBP\angle$.

$BP = CP$, ezért $BCP\angle = CBP\angle$.

$APB\angle = CBP\angle$, mert váltószögek.

Ezek szerint $BAP\Delta \sim BPC\Delta$ (szögeik egyeznek), így $\frac{AB}{6} = \frac{AB}{BP} = \frac{BP}{BC} = \frac{6}{AP+PD} = \frac{6}{AB+5}$.

Átszorozva: $AB(AB + 5) = 36$, amiből $AB = 4$.



Erre 4 pont jár.

9.

$$1 = a+b+c+d+e+f+g \leq (a+b+c)+(c+d+e)+(e+f+g) \leq 3M$$

$$\frac{1}{3} \leq M$$

Az $M = \frac{1}{3}$ el is érhető, ha $a = d = g = \frac{1}{3}$ és $b = c = e = f = 0$. Tehát M lehető legkisebb értéke $\frac{1}{3}$.

Ez 4 pontot ér.

10. Úgy tekintem, hogy ha két szalagot összekötünk, akkor azokból egy szalag lesz. Akkor fog a végén az összes szalag egy zárt kört alkotni, ha az utolsó kivételével semelyik összekötéskor nem kötjük össze ugyanannak a (hosszú) szalagnak a két végét. A bal oldalon lelógó végeket összekötöttük valahogy, így 5 szalag keletkezett. A jobb oldalon lévő végekből megfogunk egyet. 9 további vég van, amivel összeköthetjük, ebből 8 nem ugyanannak a szalagnak a másik vége. Annak az esélye tehát, hogy nem a saját végével kötjük össze $\frac{8}{9}$. Ezután marad 4 szalag. Válasszunk egy másik véget. 7 további vég van, amivel összeköthetjük, ebből 6 nem ugyanannak a szalagnak a vége. Azaz $\frac{6}{7}$ eséllyel nem a saját végével kötjük össze. ...

Azaz annak az esélye, hogy a végén egy nagy zárt kör fog keletkezni $\frac{8}{9} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{128}{315}$

A helyes válaszra 5 pont jár.

11. (a) Vegyük észre, hogy a $\left(\frac{\sqrt{1}}{4} - 4\right)$, $\left(\frac{\sqrt{2}}{4} - 4\right)$, $\left(\frac{\sqrt{3}}{4} - 4\right)$, ... $\left(\frac{\sqrt{365}}{4} - 4\right)$ számok között szerepel a $\left(\frac{\sqrt{256}}{4} - 4\right) = 0$ is, így a végeredmények szorzata 0 lesz. Szegény Falánk Manó tehát egy narancsos csokira sem számíthat ilyen módon.

A helyes válaszra 3 pont jár

(b) Az, hogy Lusta Manó végeredményeinek a szorzata nem 0, úgy lehet, hogy a 256. napon nem végezte el a műveletet. Az év 256. napja szeptemberre esik, azaz Lusta Manónak a szeptemberi hónapot kellett kihagynia.

A helyes válaszra 2 pont jár. Kivétel ha helyes a válasz, de az (a) részre nem adtak helyes választ; ekkor nem jár pont.

12. (a) Az utolsó két megállóban biztosan megáll, hiszen az utolsó ellen senki sem fog szavazni és az utolsó előtti ellen is csak egy szavazat érkezhet (és lesz legalább egy mellette is).

Lehetséges viszont, hogy csak ezen a két helyen áll meg a busz: ha a vezető hátulról kezdve sorolja fel a megállókat. (Ekkor bármelyik megálló mellett az ott leszállni készülő utas és az eddig kiszavazott megállókba készülőknek legfeljebb a fele fog szavazni, míg ellene az utolsó két megállóban leszállni készülő két utas és az eddig kiszavazott megállókban leszállni készülőknek legalább a fele.)

Ez 3 pontot ér.

(b) Minden utashoz legfeljebb egy olyan megálló létezhet, ami mellett szavazott és ahol meg is állt a busz.

Azokat a megállókat ahol megállt a busz jelölje sorszám szerint csökkenő sorrendben a_1, a_2, ...a_k. Tudjuk, hogy $a_1 = 32$ és $a_2 = 31$. Biztos, hogy akik az a_1, a_2,...,a_i megállók valamelyike mellett szavaztak, azok az a_{i+1} megálló ellen szavaznak (hiszen később kívánnak leszállni). Viszont tudjuk, hogy az a_{i+1} megállóban megállt a busz, ezért az a_{i+1} megállóra legalább annyi szavazatnak kellett érkeznie, amennyi az a_1, a_2,...,a_i megállókra összesen érkezett. Az a_1 és a_2 megállóra legalább 1-1 szavazat érkezett, így az a_3 megállóra legalább 2 szavazat érkezett, az a_4-re legalább 4, ... az a_i-re legalább 2^{i-2}.

Tudjuk, hogy az a_1, a_2, ...a_k megállókra összesen legfeljebb 32 szavazat érkezett, azaz $1+\ 1+2+ \ldots + 2^{k-2} \leq 32$. Ezek szerint $k \leq 6$.

Az, hogy 6 helyen álljon meg a busz lehetséges: ha a vezető sorszám szerint növekvő sorrendben sorolja fel a megállókat, akkor a busz a 16., 24., 28., 30., 31. és 32. megállókban fog megállni.

Ez 3 pontot ér.

13. Egy jó megoldás például a következő:

Felteszünk 2-2 kekszet a két serpenyőbe. Ha egyensúlyban vannak, addig ismételgetjük ezt, amíg olyanokat találunk amikre nincs egyensúlyban a mérleg.

Ha nincs egyensúlyban, akkor a könnyebbik serpenyőben két üres vagy egy csokis és egy üres keksz van. Tegyük fel a könnyebbik serpenyőben lévő két kekszet. Ha nem egyenlő súlyúak, akkor az egyik csokis, másik üres, így az első mérésnél a nehezebb serpenyőben két csokis volt (ebből az egyik még megvan, így kész vagyunk). Ha egyforma súlyúak, akkor mind a kettő üres.

Ezt ismételjük meg még kétszer. Így vagy találunk valamikor csokis kekszet (és kész vagyunk) vagy pedig találunk 6 darab üres kekszet. Az utóbbi esetben összesen 11 keksz van, amiből tudunk mutatni 5 kekszet, amik közül legfeljebb egy üres van. Tegyünk fel két kekszet az 5 közül. Ha egyenlő súlyúak, akkor mind a kettő csokis (kész vagyunk). Ha különböző súlyúak, akkor megvan a hetedik üres keksz is (és kész vagyunk).

Bármilyen jó megoldás esetén jár a 6 pont.